ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MẠC THỊ HUYỀN

ĐỘ SÂU STANLEY CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2015

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MẠC THỊ HUYỀN

ĐỘ SÂU STANLEY CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2015

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, ngày 23 tháng 6 năm 2015

Người viết Luận văn

Mạc Thị Huyền

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của TS Trần Nguyên An - giảng viên khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập.

Tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian tôi học tập.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

Thái nguyên, ngày 23 tháng 6 năm 2015

Người viết Luận văn

Mạc Thị Huyền

Mục lục

Mở đầu

Richard P. Stanley nổi tiếng bởi những đóng góp quan trọng cho Tổ hợp và liên hệ nó với Đại số và Hình học, đặc biệt là những đóng góp trong lý thuyết phức đơn hình. Hai dạng phức đơn hình có vai trò trung tâm trong Tổ hợp là phức chia được và phức Cohen-Macaulay. Stanley đặt ra giả thuyết mọi phức Cohen-Macaulay là chia được. Năm 1982 trong một bài báo đăng trên tạp chí *Inventiones Mathematicae* [8], Stanley đã đưa ra khái niệm mà nay được gọi là độ sâu Stanley (sdepth) của một môđun phân bậc trên một vành phân bậc giao hoán. Độ sâu Stanley là một bất biến hình học của môđun và có liên hệ mật thiết độ sâu thông thường (depth). Stanley cũng đưa ra giả thuyết $\mathrm{sdepth}(M) \geq \mathrm{depth}(M)$. J Herzog, A. S. Jahan và S. Yassemi đã chỉ ra rằng giả thuyết Stanley về độ sâu kéo theo giả thuyết Stanley về phức đơn hình. Cho đến nay cả hai giả thuyết này vẫn là những câu hỏi mở cần được giải quyết. Luận văn này trình bày một số vấn đề mở đầu về độ sâu Stanley như là: phân tích Stanley; một số tính chất cơ bản; tìm hiểu một chặn dưới của độ sâu Stanley. Các nội dung trong luận văn được trình bày dựa theo tài liệu [5], [9], [11]. Khi trình bày luận văn, tác giả đã cũng đã cố gắng trình bày lại chi tiết các chứng minh, bổ sung thêm một số ví dụ và kết quả trong các tài liệu tham khảo khác.

Luận văn được chia thành hai chương. Chương 1, chúng tôi trình bày kiến thức cơ sở về môđun phân bậc trên vành phân bậc, lọc nguyên tố của một môđun. Phần cuối chương trình bày định nghĩa và các tính chất về iđêan đơn thức trên một vành đa thức. Đây là những công cụ cơ bản dùng cho các định nghĩa và chứng minh ở chương sau.

Chương 2 trình bày về độ sâu Stanley của một môđun đa phân bậc trên vành đa phân bậc. Phần đầu chương trình bày về phân tích Stanley của môđun đa phân bậc và của iđêan đơn thức. Phần tiếp theo chỉ ra các tính chất của độ sâu Stanley với phần tử chính quy hay không chính quy và dãy khớp. Cuối cùng chúng tôi trình bày về phân tích Stanley của iđêan đơn thức không chứa bình phương và áp dụng.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Môđun phân bậc trên vành phân bậc

Trong mục này ta kí hiệu S là vành giao hoán có đơn vị. Trước hết ta trình bày một số định nghĩa và kết quả về vành và môđun phân bậc.

Định nghĩa 1.1.1. Cho $(G,+)$ là một vị nhóm Abel. Một *vành phân bậc* hoặc *G-vành phân bậc* là một vành S nếu tồn tại một phân tích tổng trực tiếp $S = \bigoplus_{i\in G} S_i$ như các $\mathbb{Z}$-môđun thỏa mãn $S_iS_j \subseteq S_{i+j}$ với mọi $i, j \in G$.

Nếu S là G-phân bậc và M là một S-môđun, thì M được gọi là *G-phân bậc* nếu tồn tại một phân tích tổng trực tiếp $M = \bigoplus_{i\in G} M_i$ như một $\mathbb{Z}$-môđun thỏa mãn $S_iM_j \subseteq S_{i+j}$ với mọi $i, j \in G$.

Một phần tử $u \in M$ là *thuần nhất*, nếu tồn tại $i \in G$ sao cho $u \in M_i$ và khi đó i được gọi là *bậc* của u, ta viết $\deg(u) = i$. Mỗi M_i được gọi là một *thành phần thuần nhất* của M có bậc i, với $i \in G$. Do đó mọi phần tử $m \in M$ có thể biểu diễn được duy nhất dưới dạng $m = \sum_{i\in G} m_i$, trong đó $m_i \in M_i$, chỉ hữu hạn $m_i \neq 0$ và được gọi là *thành phần thuần nhất* của m.

Một môđun con $N \subseteq M$ được gọi là thuần nhất, hay G-môđun con phân bậc nếu nó được sinh bởi các phần tử thuần nhất ứng với G-phân bậc. Điều kiện này tương đương với một trong hai điều kiện sau:

(i) Với $m \in M$, nếu $m \in N$ thì mỗi thành phần thuần nhất của m đều thuộc N;

(ii) $N = \sum_{i\in G}(N \cap M_i)$.

Nếu $N \subseteq M$ là một môđun con thuần nhất của M và ta có tập $N_i = M_i \cap N$ thì $N = \bigoplus_{i\in G} N_i$ và môđun thương $M/N = \bigoplus_{i\in G} M_i/N_i$ lại là một S-môđun G-phân bậc. Và từ đó ta cũng có khái niệm iđêan phân bậc.

Cho I là iđêan bất kì của S. Ta kí hiệu I^* là iđêan sinh bởi các phần tử thuần nhất $u \in I$. Nếu I phân bậc thì $I^* = I$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho S là một G-vành phân bậc và M, N là các S-môđun G-phân bậc. Một S-đồng cấu $\varphi : M \to N$ là phân bậc có bậc d với $d \in G$, nếu $\varphi(M_i) \subseteq N_{i+d}$ với mọi $i \in G$. Ta gọi φ phân bậc, nếu nó là thuần nhất bậc 0.

Hạt nhân $\operatorname{Ker}\varphi$ và ảnh $\operatorname{Im}\varphi$ của ánh xạ phân bậc φ cũng là các môđun G-phân bậc.

Nếu G là $\mathbb{Z}$ hoặc $\mathbb{Z}^n$, ta nói rằng S lần lượt là một vành phân bậc hoặc đa phân bậc, và S-môđun M được gọi là S-môđun phân bậc hoặc đa phân bậc. Trong cả 2 trường hợp với G-vành phân bậc bất kì $S = \bigoplus_{i\in G} S_i$, thì ta có thể xác định một G-vành phân bậc khác với cố định $t \in G$ thỏa mãn $S(t) = \bigoplus_{i\in G} S(t)_i$, trong đó $S(t)_i := S_{t+i}$.

Ví dụ 1.1.3. Cho vành đa thức $S = K[x_1, x_2, x_3]$.

(i) Xét phân bậc $\deg x_1 = \deg x_2 = \deg x_3 = 1$. Khi đó ta có vành phân bậc thông thường. Ta có $S_{(1)} = Kx_1 \oplus Kx_2 \oplus Kx_3$. Do đó $\dim_K S_{(1)} = 3$. Một cách tổng quát $S_{(a)}$ là tập hợp các đa thức thuần nhất bậc a (đối với 3 biến x_1, x_2 và x_3).

(ii) Xét phân bậc $\deg x_1 = \deg x_2 = (1,0)$; $\deg x_3 = (0,1)$. Khi đó ta có vành 2-phân bậc hay còn gọi là vành song phân bậc. Ta có $S_{(1,0)} = Kx_1 \oplus Kx_2$; $S_{(0,1)} = Kx_3$; và $S_{(1,1)} = Kx_1x_3 \oplus Kx_2x_3$. Do đó $\dim_K S_{(1,0)} = 2$; $\dim_K S_{(0,1)} = 1$ và $\dim_K S_{(1,1)} = 2$. Một cách tổng quát $S_{(a,b)}$ là K-không gian véctơ sinh bởi các đơn thức có bậc đối với x_1, x_2 là a và bậc của x_3 là b. Do đó

$$S_{(a,b)} = \{f(x_1,x_2).x_3^b \mid f(x_1,x_2) \text{ thuần nhất bậc } a \text{ theo } x_1,x_2\}.$$

(iii) Xét phân bậc

$$\deg x_1 = (1,0,0); \quad \deg x_2 = (0,1,0); \quad \deg x_3 = (0,0,1).$$

Khi đó S là vành 3-phân bậc và ta có

$$S_{(1,0,0)} = Kx_1; \quad S_{(0,1,0)} = Kx_2; \quad S_{(0,0,1)} = Kx_3.$$

Vì thế $\dim_K S_{(1,0,0)} = \dim_K S_{(0,1,0)} = \dim_K S_{(0,0,1)} = 1$.
Tổng quát, $S_{(a,b,c)}$ là không gian véctơ chiều 1 sinh bởi $x_1^a x_2^b x_3^c$.

Đối với vành đa thức S, ngoài cách phân bậc như đã xét ở trên, còn nhiều cách phân bậc khác. Ví dụ như sau:

(iv) Xét phân bậc $\deg x_1 = \deg x_2 = (2,0); \quad \deg x_3 = (0,1)$. Khi đó $S_{(1,b)} = 0$ với mọi b và

$$S_{(2,0)} = Kx_1 \oplus Kx_2; \quad S_{(4,2)} = Kx_1^2 x_3^2 \oplus Kx_1 x_2 x_3^2 \oplus Kx_2^2 x_3^2.$$

Vì thế $\dim_K S_{(2,0)} = 2$; $\dim_K S_{(4,2)} = 3$. Tổng quát, $S_{(a,b)}$ xác định như sau: nếu a lẻ thì $S_{(a,b)} = 0$ với mọi b. Nếu a chẵn thì

$$S_{(a,b)} = \{ f(x_1,x_2).x_3^b \mid f(x_1,x_2) \text{ thuần nhất bậc } a/2 \text{ theo } x_1,x_2 \}.$$

Trong toàn bộ luận văn ta luôn xét phân bậc là thuần nhất như Ví dụ (iii).

Phần tiếp theo trình bày khái niệm và một số tính chất liên quan đến một iđêan nguyên tố liên kết.

Định nghĩa 1.1.4. Cho M là một S-môđun. Một iđêan nguyên tố P của S được gọi là một iđêan *nguyên tố liên kết* của M, nếu tồn tại một phần tử $x \in M$ để $P = 0 : x = \mathrm{Ann}(x)$. Tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của M kí hiệu là $\mathrm{Ass}_S M$, hoặc $\mathrm{Ass} M$ nếu như không cần thiết phải nhắc đến S. Như vậy

$$\mathrm{Ass} M = \{ P \in \mathrm{Spec} S \mid \exists x \in M, P = \mathrm{Ann}(x) \}.$$

Nhận xét. Phần tử x làm cho $0 : x$ là một iđêan nguyên tố, thì $x \neq 0$.

Bổ đề 1.1.5. *P là một iđêan nguyên tố liên kết của S-môđun M khi và chỉ khi tồn tại một đơn cấu S-môđun từ S/P tới M, hay tồn tại môđun con của M đẳng cấu với S/P.*

Bổ đề 1.1.6. *Nếu N là một môđun con của của S-môđun M thì*

$$\operatorname{Ass} N \subseteq \operatorname{Ass} M.$$

Chú ý. Khi S là vành Noether, I là iđêan của S. Khi đó I có phân tích nguyên sơ $I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r$, với Q_i là P_i-nguyên sơ và $\operatorname{Ass}(S/I) = \{P_1, \ldots, P_r\}$.

Từ hai bổ đề trên ta chỉ ra sự tồn tại một lọc các môđun con có tính chất đặc biệt. Trước hết ta nhắc lại kết quả đối với môđun hữu hạn sinh.

Mệnh đề 1.1.7. *Cho M là một môđun khác 0, hữu hạn sinh trên một vành Noether S. Khi đó tồn tại một dãy các môđun con*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

và một họ các iđêan nguyên tố $P_1, \ldots, P_n$ sao cho $M_i/M_{i-1} \cong S/P_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, đồng thời $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.

Chứng minh. Ta sẽ xây dựng dãy các môđun con như sau: $M_0 = 0$. Lấy $x_1 \in M$ sao cho $\operatorname{Ann}(x_1) = P_1 \in \operatorname{Ass}(M)$ và chọn $M_1 = Sx_1 \cong S/P_1$. Nếu $M \neq M_1$, lấy $x_2 + M_1 \in M/M_1$ sao cho $\operatorname{Ann}(x_2 + M_1) = P_2 \in \operatorname{Ass}(M/M_1)$ và lấy $M_2 = M_1 + Sx_2$, ta có $M_2/M_1 \cong S/P_2$. Quá trình trên sẽ dừng do M là một môđun Noether, và do đó ta xây dựng được dãy các môđun con của M:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$$

thỏa mãn $M_i/M_{i-1} \cong S/P_i$ với $P_i \in \operatorname{Spec} S$. Ta có với mỗi $j = 1, \ldots, n$

$$\operatorname{Ass}(M_j) \subseteq \operatorname{Ass}(M_{j-1}) \cup \operatorname{Ass}(S/P_j) = \operatorname{Ass}(M_{j-1}) \cup \{P_j\}.$$

Do đó $\operatorname{Ass}(M) \subseteq \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Mệnh đề được chứng minh. □

Bổ đề 1.1.8. *Cho S là vành phân bậc, M là S-môđun phân bậc. Khi đó*

(i) Với mọi iđêan nguyên tố P, ta có P^* là iđêan nguyên tố,

(ii) Nếu $P \in \operatorname{Supp}(M)$ thì $P^* \in \operatorname{Supp}(M)$,